**מקסימיזציה של מידע משותף וניתוח רכיבים בלתי-תלויים (ICA)**

מבנה הרשת:

נדון תחילה ברשת עם שכבת קלט ושכבת פלט כאשר מספרי הנוירונים בשתי השכבות שווים. נניח גם שאין קשרי משוב בין הנוירונים.













. . .





. . .













המיפוי שמתבצע על-ידי הרשת הוא דטרמיניסטי, כלומר ללא רעש:

 (1)

פונקצית המטרה:

מטרת הלמידה למצוא תבנית קשרים שתביא למקסימום אינפורמציה משותפת בין הקלט והפלט. מכיוון שמדובר בנוירונים לא לינאריים, זו לא יכולה להיות טרנספורמציית הזהות. באופן כללי:

 (2)

אנטרופיית  
הרעש

אנטרופיית  
הפלט

במקרה שלנו הקלט  קובע חד משמעית את  כך שהאיבר של אנטרופיית הרעש לא משחק תפקיד בלמידה. גם אם היה רעש בפלט של הנוירונים, אשר אינו תלוי בקשרים, הוא לא היה משפיע על הלמידה (אפשר להתייחס לאיבר זה כאל קבוע ייחוס).

הגודל שעלינו להביא למקסימום הוא, אם כן, האנטרופיה של הפלט. בגבול הרצף משתמשים באנטרופיה הדיפרנציאלית:

 (3)

 מייצג את אלמנט הנפח שלפיו מתבצעת האינטגרציה.

אנטרופיית הפלט גדולה יותר ככל ש:

1. פעילות נוירוני הפלט פורשת את התחום הדינמי שלהם בצורה כמה שיותר קרובה להתפלגות אחידה
2. נוירוני הפלט בלתי תלויים זה בזה. הסתכלות על הפעילות של חלק מהנוירונים לא מלמדת אותנו על פעילות השאר.

במובן זה, מטריצת הקשרים W שתבצע מקסימיזציה ל-H תמצא רכיבים בלתי-תלויים במרחב הקלט – כל שורה של W תייצג את אחד הצירים הבלתי תלויים.

נבטא את  בעזרת התפלגות הקלט. מתקיים:

 (4)

כאשר:

 הטרנספורמציה ההפוכה

 מטריצת היעקוביאן.מבטאת את הרגישות של הנוירון ה i לקלט ה-j.

הסבר ציורי אינטואיטיבי:

מרחב הקלט 

מרחב הפלט  
 

אלמנט  
נפח 

אלמנט  
נפח 

הטרנספורמציה של אלמנט הנפח היא :



פקטור הנפח הוא .

הסיכוי לקלט בתחום מסוים הוא . מתקיים:



דוגמה: , .



כאשר הנפח גדל הצפיפות קטנה.

נציב את (4) ב (3):

 (5)

ביטוי זה שקול ל  


מכאן:

 (6)

 - אנטרופיית הקלט, שעליה אין לנו השפעה.

האיבר שעלינו למקסם הוא .

נגדיר את פונקצית המחיר הבאה:

 (7)

המטרה היא למצוא מינימום ל .

נסכם כעת ניסוחים שקולים של הבעיה:

1. למקסם את האינפורמציה המשותפת בין הקלט והפלט.
2. למקסם את האנטרופיה של יחידות הפלט.
3. למקסם את "פקטור ההגדלה" מהקלט לפלט.
4. להגדיל את הרגישות (הסוספטיביליות) של הפלט לשינויים בקלט.

כללי למידה:

ראשית נרשום ביטוי מפורש לתלות של מטריצת הרגישות ב :





 (8)

נגדיר מטריצה אלכסונית:

 (9)

בסימון זה:

(10) 

ניתן לרשום:

(11) 

(12) 

המטריצה  סימטרית ולכן ניתנת ללכסון. מכאן:



Tr אינו תלוי   
בבסיס

 הוא  של מטריצה. זהו טור טיילור של  כשמציבים בו את המטריצה .

סה"כ, פונקצית המחיר:

(13) 

כאשר גוזרים את ה לפי פרמטר כלשהו, , מקבלים:

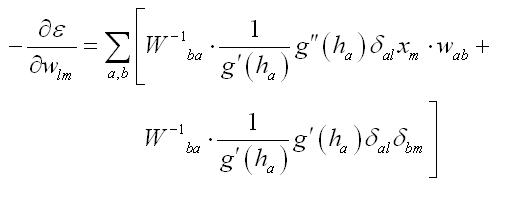


במעבר האחרון השתמשנו בעובדה שניתן לעשות פרמוטציה ציקלית של המטריצות בתוך ה- Tr. נגזור כל אחד מאגפי לפי :

(15) 



(16) 

 (17)

(18)

נשים לב כי: 

(19) 

נגדיר 

מתקבל כלל הלמידה הבא:

(20) 

(21) 

איבר  
לוקאלי

איבר לא  
לוקאלי

הרחבות

ניתן לפתח כללי למידה גם למקרה שיש יותר נוירונים בשכבת הפלט וכן קיימים קשרי משוב בין הנוירונים בשכבת הפלט.



מבנה הרשת:







(יצוג overcomplete)

הדינמיקה:

 (22)

במצב היציב:

 (23)

המטרה היא למצוא מקסימום אינפורמציה משותפת בין הפלט במצב יציב לבין הקלט.  
ניתן להראות כי פונקצית המחיר היא כעת:

 (24)

אך כעת  אינה ריבועית.  
בגלל קשרי המשוב הצורה של  מורכבת יותר.



נגדיר שוב מטריצה אלכסונית: 

  
  
 (25)

ניתן לפתח כללי למידה ל  ול :



מקבלים:

 (26)

 (27)

כאשר:

 (28)

 (29)

 (30)

 (31)

כאשר מציבים בכללים המורחבים  ולוקחים  מקבלים כמקרה פרטי את האלגוריתם שקיבלנו קודם, משוואה (21)