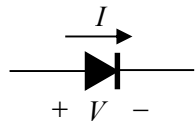


שימוש במודלים מאפשר לבצע חישובים ביתר קלות. כעת נראה מספר מודלים עבור דיודת הצומת בשני המקרים, אות קטן ואות גדול, ונציג מספר דוגמאות אשר יסייעו בהבנת הנושא.

הדיודה

אופיין מתח-זרם של דיודת צומת בממתח קדמי

הזרם בדיודת צומת כפונקציה של המתח V על פניה, נתון בקירוב טוב ע"י נוסחה



$$I = I_s \left(e^{V/nV_T} - 1 \right) \quad (1)$$

איור 1

כאשר עבור סיליקון $V_T = kT/q \approx 26\text{mV}$ בטמפרטורת החדר, ולשם פשטות תמיד נניח $n=1$ ו- $T=300\text{K}$ אלא אם כן נאמר אחרת באופן מפורש. (1) נכון גם כאשר על הדיודה מופעל מתח בכיוון קדמי, כמו באיור לעיל, וגם בכיוון אחורי (הפוך מזה שבאיור). היות ו- I_s הוא תמיד מספר קטן ביותר, בסדר גודל של $10^{-16}\text{A} \div 10^{-14}\text{A}$, כדי שיזרום בדיודה זרם משמעותי כלשהו בכיוון קדמי, חייב להתקיים $e^{V/V_T} \gg 1$ ולכן במצב של זרימה בכיוון קדמי, אפשר לקרב את (1) לצורה

$$I \approx I_s e^{V/V_T} \quad (2)$$

כעת נבנה מודל של הדיודה, אשר מתאר את זרם הדיודה בתלות במתח משתנה על פניה. תחילה נפתח את (2) לטור טיילור סביב ערך מתח קבוע V_{dc} (זאת נקודת העבודה ה-dc):

$$I = I_s e^{V/V_T} = \underbrace{I_s e^{V_{dc}/V_T}}_{I_{dc}} e^{(V-V_{dc})/V_T} = I_{dc} \left[1 + \frac{V-V_{dc}}{V_T} + \frac{1}{2!} \left(\frac{V-V_{dc}}{V_T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{V-V_{dc}}{V_T} \right)^3 + \dots \right] \quad (3)$$

שימו לב ש- $I_{dc} = I_s e^{V_{dc}/V_T}$ הוא זרם ה-dc (זרם המנוחה) כאשר $V = V_{dc}$ הוא מתח המנוחה. במילים אחרות, (V_{dc}, I_{dc}) היא נקודת העבודה, אילו V_{dc} ו- I_{dc} הם מתח המקדום וזרם המקדום.

נסמן $v \equiv V - V_{dc}$, כלומר $v = V - V_{dc}$. אם $|v| \ll V_T = 26\text{mV}$, כלומר, אם האות המתח V משתנה סביב V_{dc} הרבה פחות מ- 26mV , אנחנו אומרים ש- v הוא אות קטן. שימו לב ש-"קטן" הוא מושג יחסי, כאן זה אומר ששינויי המתח סביב מתח המנוחה V_{dc} קטנים יחסית ל- V_T . ע"י הצבת $v \equiv V - V_{dc}$ בנוסחה (3) נקבל

$$I = I_{dc} \left[1 + \frac{v}{V_T} + \frac{1}{2!} \left(\frac{v}{V_T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{v}{V_T} \right)^3 + \dots \right], \quad v \equiv V - V_{dc} \quad (4)$$

אבל עבור אות קטן $\left| \frac{v}{V_T} \right| \ll 1$, ולכן עבור כל חזקה $n > 1$ מתקיים $\left| \frac{v}{V_T} \right|^n \ll \left| \frac{v}{V_T} \right|$ ונוכל לקרב את הנוסחה האחרונה לצורה

$$I \approx I_{dc} \left[1 + \frac{v}{V_T} \right], \quad \left| \frac{v}{V_T} \right| \ll 1 \quad (5)$$

נוסחה (5) היא המודל הליניארי של הדיודה, והוא קירוב טוב למציאות עבור אות קטן, וסיבב נקודת עבודה כזאת שבה זורם בדיודה $I = I_{dc}$. באופן כללי, בהקשר למעגל מסוים, נוכל לומר שאות הוא "קטן" אם הוא מתאים למודל ליניארי.

כעת, בעזרת המודל, נוכל למשל לחשב מה ההתנגדות שרואה מקור מתח חילופין המחובר על פני הדיודה, והמייצר אות

קטן. על פי הגדרה, התנגדות הדינמית של הדיודה היא $r = \frac{dV}{dI}$, כאשר $\frac{dV}{dI} = \frac{d(V_{dc} + v)}{dI} = \frac{dv}{dI}$, לכן

$$\frac{1}{r} = \frac{dI}{dv} = \frac{d}{dv} \left(I_{dc} \left[1 + \frac{v}{V_T} \right] \right) = \frac{I_{dc}}{V_T} \Rightarrow r = \frac{V_T}{I_{dc}} \quad (6)$$

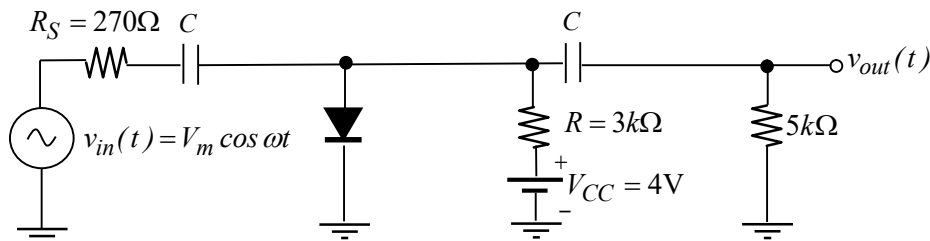
התנגדות הדיודה עבור אות קטן מכונה התנגדות דינמית, וכפי שרואים ב-(6), היא תלויה בנקודת העבודה. למשל,

עבור $I_{dc} = 2\text{mA}$, נקבל $r = \frac{26\text{mV}}{2\text{mA}} = 13\Omega$. אות הכניסה יכול להיות פונקציה של הזמן, כלומר $v \equiv v(t)$, למשל, אות

שמע מרדיו או מטלוויזיה. התרגיל הבא יבהיר את הנושא.

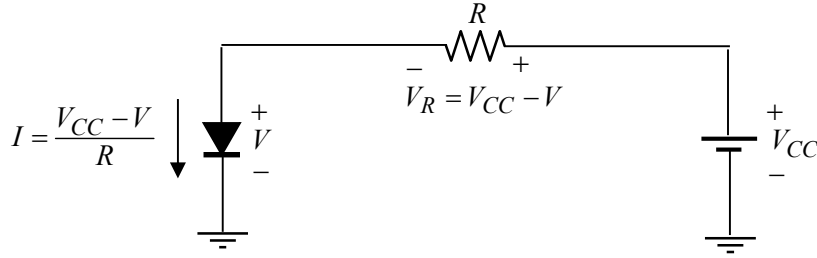
תרגיל 1: מחלק מתח מבוקר מתח מבוסס על דיודה

במעגל שבאיור, חשבו בקירוב את $v_{out}(t)$ כפונקציה של $v_{in}(t)$, כאשר ידוע ש- $V_m \ll 26\text{mV}$, והקבלים C הם קבלי צימוד, כלומר, הם גדולים מאד, וניתן להחשיב אותם לקצר עבור האות בתדר ω . הדיודה היא מסיליקון.



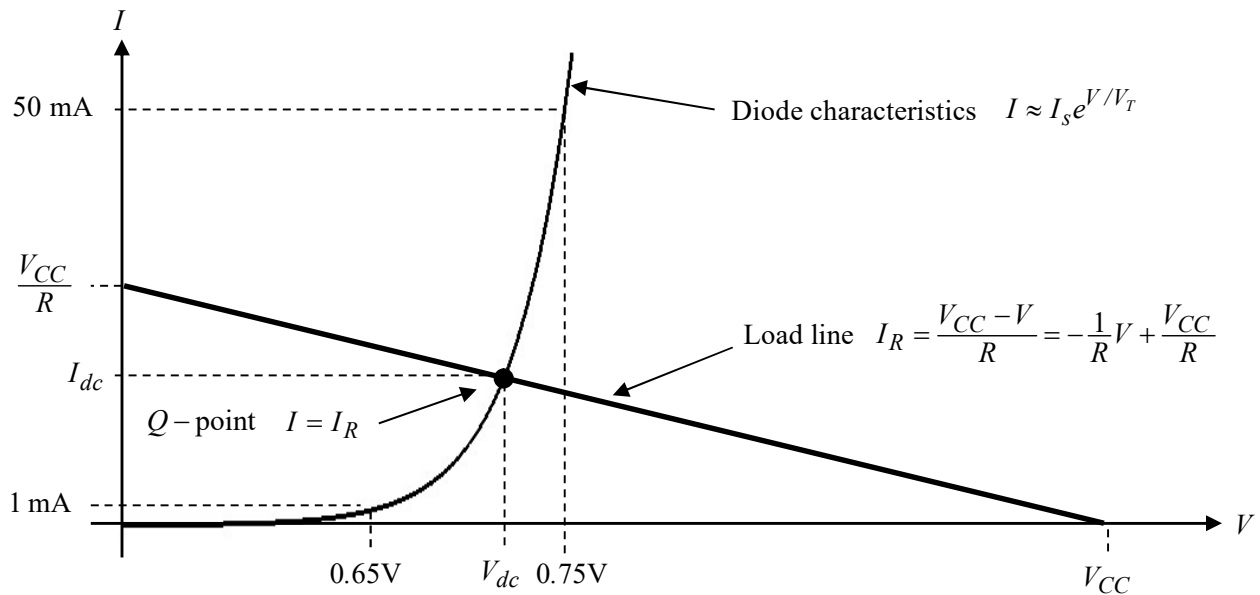
איור 2

תחילה, נשים לב שלפי (2) הזרם בדיודה גדל כפונקציה מעריכית של המתח על פניה. נובע מכך, שבכל תחום הזרמים המעשי בו הדיודה יכולה לעבוד, המתח על הדיודה משתנה מעט. כדי לראות זאת, נסתכל על החלק של המעגל אשר קובע את נקודת העבודה של הדיודה:



איור 3

נשרטט את הגרף מתח-זרם של הדיודה ועליו נשרטט את הגרף המתאר את הזרם בנגד כפונקציה של המתח בדיודה. היות וזרם הדיודה חייב להיות זהה לזרם הנגד, נקודת העבודה (V_{dc}, I_{dc}) של הדיודה חייבת להימצא בנקודת החיתוך של שני הגרפים, כפי שמתואר בשרטוט להלן

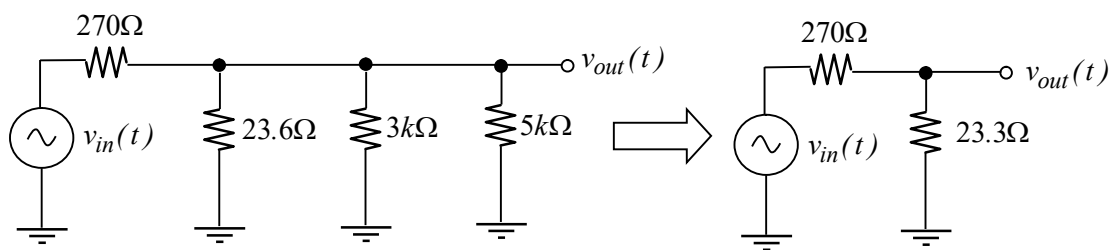


איור 4

שימו לב שבגלל שגרף הדיודה עולה בצורה חדה מאוד, אם נשנה אפילו באופן משמעותי את הערך של R או של V_{CC} זרם הדיודה I_{dc} בנקודת העבודה יכול להשתנות בהרבה, אבל ערך המתח V_{dc} בנקודת העבודה כמעט שלא ישתנה. באופן מעשי, כל עוד זרם בדיודת סיליקון זרם משמעותי כלשהו, ערך המתח V_{dc} תמיד יהיה בסביבת $0.7V$ בלא תלות בערך הזרם דרכה. בתנאים של זרם קבוע, המתח V_{dc} קטן בכ- $2mV$ עבור עליה של $1C^\circ$. רואים שהדיודה מתחילה להוליך זרם במתח בסביבות $0.5V \div 0.7V$, ומתח בתחום זה מכונה מתח הסף של הדיודה. לכן על מנת להעריך את נקודת העבודה של דיודה בקירוב טוב, אין צורך למצוא את נקודת החיתוך המדויקת בין שני הגרפים, אלא מספיק להניח $V_{dc} \approx 0.7V$. בתרגיל הנוכחי, נוכל להעריך שבדיודה זרם ישר $I_{dc} \approx \frac{4-0.7}{3k} = 1.1 mA$,

לכן $r = \frac{V_T}{I_{dc}} = \frac{26}{1.1} \approx 23.6 \Omega$. איור 5 מראה את המעגל השקול ל-ac, שמתקבל כאשר אנו מחליפים את מקור המתח

הישר ואת הקבלים הגדולים בקצר



איור 5

מכאן נוכל לחשב את אות המוצא $v_{out}(t) = \frac{23.3}{23.3 + 270} v_{in}(t) \approx 0.079 v_{in}(t)$. באופן מעשי, היות וההתנגדות של

הדיודה נמוכה בהרבה מזו של הנגדים האחרים, אפשר לקבל ביטוי כללי התלוי בערכו של I_{dc}

$$v_{out}(t) \approx \frac{r}{r + R_S} v_{in}(t) \approx \frac{r}{R_S} v_{in}(t) = \frac{V_T}{I_{dc} R_S} v_{in}(t)$$

מכאן ברור שאם נשנה את הערך של V_{CC} , נוכל לשנות את האמפליטודה של $v_{out}(t)$.

שימו לב שלאחר ניתוח ראשוני, אנחנו רואים שהאמפליטודה V_m הונחתה פי 10 לערך, ולכן החישוב שעשינו יהיה נכון גם עבור מתחים גדולים עד פי 10 ממה שהנחנו בהתחלה, כלומר המגבלה המעשית תהיה $V_m \ll 260\text{mV}$ כי הדרישה לאות קטן היא עבור המתח המצוי ישירות על פני הדיודה.

אחד השימושים של מעגל כזה הוא מנחת מבוקר מתח, למשל לבקרת עוצמת שמע בטלוויזיה. למשל, ניתן לבצע את שינוי המתח בקלות ע"י פקודת תוכנה בעזרת רכיבים המכונים DAC (Digital-to-Analog Converter) הקיימים היום ברכיבים דיגיטאליים רבים, ובפרט ברכיבים ממוחשבים.

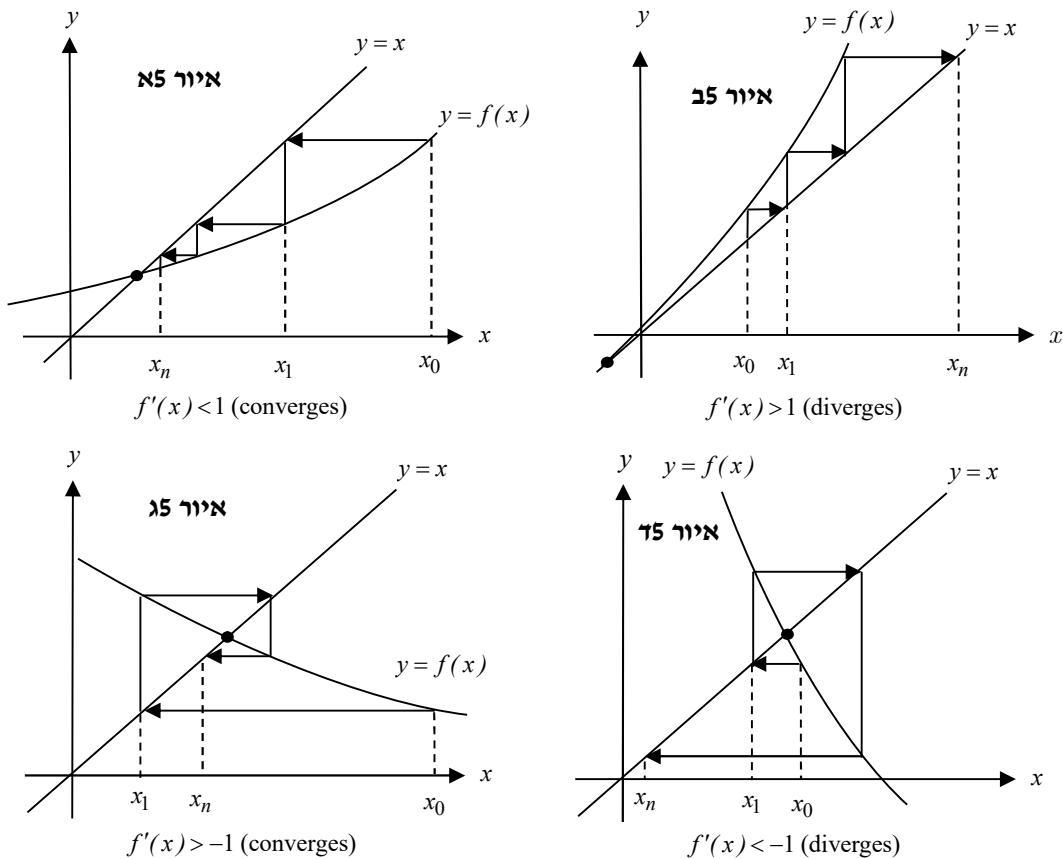
מציאת נקודת העבודה של דיודה בעזרת חישוב נומרי

בתרגיל 1 "ניחשונו" ש- $V_{dc} \approx 0.7\text{V}$ ועל סמך זה חישבנו את זרם הדיודה בנקודת העבודה וקיבלנו $I_{dc} \approx 1.1\text{mA}$. הסיבה שנוקקנו לערכה היא שמשוואת הדיודה לא ליניארית, ולכן קשה למצוא את מתח הדיודה בצורה אנליטית. יחד עם זאת, אם ברצוננו למצוא פתרון מדויק יותר, יש באפשרותנו להשתמש בשיטת חישוב נומרית. קיימות שיטות רבות לפתרון משוואות לא ליניאריות. השיטה שנבחר כאן מוכרת בשם **איטרצית נקודה קבועה – fixed-point iteration**, והיא אלגוריתם יעיל ופשוט לפתרון משוואות מהצורה $f(x) - x = 0$ בתחום $a \leq x \leq b$, כלומר, למציאת הערך של x המקיים $f(x) = x$, כאשר $f(x)$ יכולה להיות פונקציה לא ליניארית. האלגוריתם מתכנס לפתרון מדויק יחיד בתנאי ש- $|df(x)/dx| < 1$ בתחום $a \leq x \leq b$, ויש לבדוק תנאי זה לפני שמנסים לפתור את המשוואה.

האלגוריתם מבוצע כדלקמן:

- א. "מנחשים" נקודת התחלה x_0 בתחום $a \leq x \leq b$
- ב. מציבים את x_0 בתוך $f(x)$ ומחשבים ערך חדש $x_1 = f(x_0)$ בצורה
- ג. מציבים את x_1 בתוך $f(x)$ ומחשבים שוב ערך חדש $x_2 = f(x_1)$, וממשיכים כך לחשב את x_3, x_4, \dots, x_n .
- כל שלב חישובי כזה מכונה איטרציה (Iteration)
- ד. אם האלגוריתם מתכנס (והוא מתכנס אם התנאי $|df(x)/dx| < 1$ מתקיים), אז לאחר n איטרציות נקבל $x_n \approx f(x_{n-1})$ והתוצאה כמעט מפסיקה להשתנות עם תוספת איטרציות. המשמעות היא ש- x_n קרוב לפתרון המדויק, כי אם \hat{x} הוא הפתרון המדויק, אז חייב להתקיים $\hat{x} = f(\hat{x})$, וזה אומר שעבור n גדול מספיק $x_n \approx \hat{x}$. זו הסיבה ששיטה זו מכונה fixed-point iteration.

איורים 5א עד 5ד מתארים את פעולת האלגוריתם בצורה גראפית



לצורך מציאת נקודת העבודה של הדיודה בתרגיל 1, נשתמש במשוואה (2). המתח על הדיודה נתון ע"י

$$V = V_{CC} - RI = V_{CC} - RI_s e^{V/V_T} \Rightarrow V = V_T \ln \left(\frac{V_{CC} - V}{RI_s} \right) \quad (7)$$

לכן לצורך הפתרון הנומרי

$$f(V) = V_T \ln\left(\frac{V_{CC} - V}{RI_s}\right) = -V_T \ln(RI_s) + V_T \ln(V_{CC} - V) \Rightarrow \left|\frac{df(V)}{dV}\right| = \frac{V_T}{V_{CC} - V} \quad (8)$$

בתרגיל 1 נתון $V_{CC} = 4V$, ידוע ש- $V_T = 26mV$ ו- $0 < V < 1V$, ונגיח $I_s = 10^{-15} A$. מכאן

$$\left|\frac{df(V)}{dV}\right| = \frac{V_T}{V_{CC} - V} < \frac{26 \times 10^{-3}}{4-1} < 1 \quad (9)$$

לכן אלגוריתם fixed-point iteration מתאים. אם האלגוריתם מתכנס מהר נוכל לבצע את האיטרציות בחישוב ידני על פי השלבים הבאים כאשר

$$V_0 = 0, \quad V_{n+1} = f(V_n) = V_T \ln\left(\frac{V_{CC} - V_n}{RI_s}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$V_1 = f(V_0) = 0.026 \ln\left(\frac{4-0}{3000 \times 10^{-15}}\right) = 0.7258862V \Rightarrow \left|\frac{V_1 - V_0}{V_1}\right| = 1 : \underline{\text{שלב 1}}$$

$$V_2 = f(V_1) = 0.026 \ln\left(\frac{4-0.7258862}{3000 \times 10^{-15}}\right) = 0.7206798V \Rightarrow \left|\frac{V_2 - V_1}{V_2}\right| \approx 7.2 \times 10^{-3} : \underline{\text{שלב 2}}$$

$$V_3 = f(V_2) = 0.026 \ln\left(\frac{4-0.7206798}{3000 \times 10^{-15}}\right) = 0.7207211V \Rightarrow \left|\frac{V_3 - V_2}{V_3}\right| \approx 5.7 \times 10^{-5} : \underline{\text{שלב 3}}$$

$$V_4 = f(V_3) = 0.026 \ln\left(\frac{4-0.7207211}{3000 \times 10^{-15}}\right) = 0.7207208V \Rightarrow \left|\frac{V_4 - V_3}{V_4}\right| \approx 4.5 \times 10^{-7} : \underline{\text{שלב 4}}$$

רואים שלאחר שני שלבים בלבד השגיאה היחסית היא פחות מ-1%. ע"י שימוש בתוצאה ל- V_4 נקבל

$$I = \frac{V_{CC} - V_4}{R} = \frac{4 - 0.7207208}{3000} = 1.093mA$$

על כן הערכה המקורבת $I \approx 1.1mA$ בתרגיל 1 הייתה מדויקת עד כדי 0.6%.

אופיין מתח-זרם של הדיודות צומת בממתח אחורי

בכוון אחורי, כלומר, עבור $V < 0$, האיבר המעריכי ב- (1) זניח לעומת 1, ונוכל לקרב את המשוואה לצורה

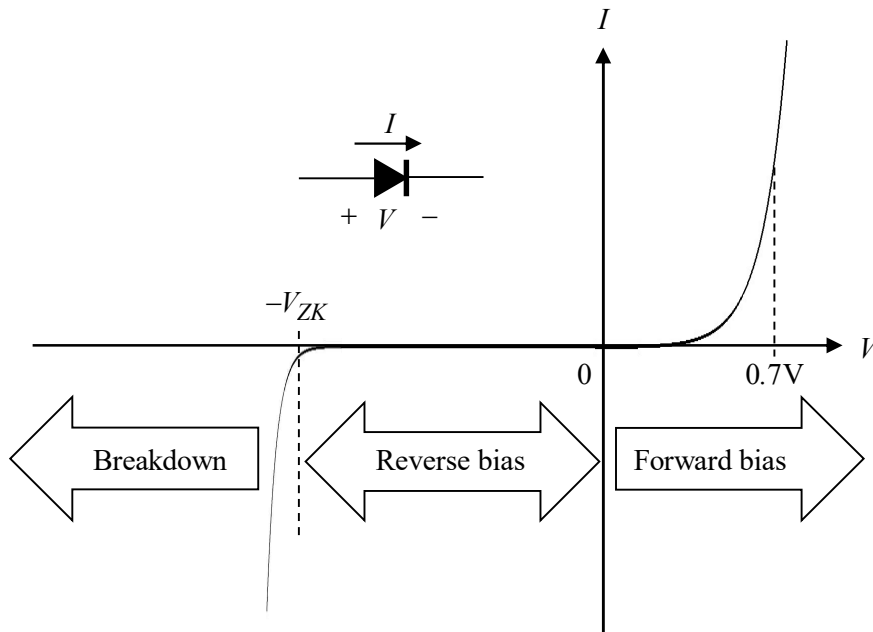
$$I = I_s \left(e^{V/V_T} - 1 \right) \approx -I_s, \quad V < 0 \quad (10)$$

בגלל ש- I_s הוא זרם קטן ביותר המכונה זרם רוויה אחורי, או זרם זליגה אחורי, בממתח אחורי הדיודה היא למעשה נתק והזרם דרכה קבוע אך זניח. בפועל, I_s מכפיל את עצמו כל עלייה של $10^\circ C$ בטמפרטורה. אם נמשיך ונגדיל את הממתח האחורי, במתח הפוך מסוים $V = -V_{ZK}$, כאשר $V_{ZK} > 0$, הדיודה פתאום תתחיל להוליך עם התנגדות נמוכה מאד, ותתנהג למעשה כמו מקור מתח שערכו קבוע ושווה ל- $-V_{ZK}$. הערך V_{ZK} בו תופעה זו מתרחשת מכונה מתח פריצה אחורי (reverse breakdown voltage), והוא יכול להשתנות בין וולטים בודדים למאות וולט, תלוי במבנה הדיודה. לכן אנחנו מבדילים בשלושה אזורים המצוינים בשרטוט הבא:

(1) אזור ממתח קדמי: $V > 0$

(2) אזור ממתח אחורי: $-V_{ZK} < V \leq 0$

(3) אזור פריצה אחורית: $V < -V_{ZK}$



איור 6

ייצוג של דיודה ע"י מודלים מקורבים

בעבודה ההנדסית המעשית, לעתים קרובות יש חשיבות ביכולת מהירה של הבנת והערכת הביצועיים של מעגל, אילו לתוצאות המספריות המדויקות יש רק חשיבות משנית. בגלל האופי החד כל כך של אופייני הדיודה, ניתן לבנות מספר מודלים ברמות דיוק שונות. במקרים רבים, מודלים אלה מאפשרים לבצע ניתוח מהיר ופשוט של מעגלים מורכבים, במחיר של אובדן דיוק נסבל בתוצאות המספריות. כדי לעמוד על ההבדל בדיוק בין המודלים נתבונן במעגל שבאיור 3, ונחשב את זרם המקדום I , מתח המקדום V , ואת המתח על הנגד V_R בעזרת כל אחד מהמודלים השונים, כאשר הנגד

הוא $R = 3k\Omega$ בכל המקרים, הערכים המחושבים הם $I = \frac{V_{CC} - V}{R}$, $V_R = V_{CC} - V$, ו- V תלוי בבחירת המודל.