פתרון מבחן באופטיקת פורייה מועד ב' 2009

1. א. $g(x,y)$ מאיר בגל אחיד את $t(x,y)$, מלבד אותו ומלבד שני מספיק גל יחוס כדורי מתבדר שיצא במרחק b משמאל להולוגרמה. נתייחס אחר לנקודת מרכז האובייקט $t(x,y)$ המצויה בגובה x_0 מעל ציר האופטי. התוצאה הנרשמת על ההולוגרמה מהתאבכות של נקודת האובייקט והיחוס היא

$$I_H(x,y) = \left| R\,Q\left[\tfrac{1}{b}\right] + a\,e^{j\frac{\pi}{\lambda b}\left[(x-x_0)^2+y^2\right]} \right|^2$$

$$= |R|^2 + |a'|^2 + R a'^* e^{j\frac{2\pi x_0 x}{\lambda b}} + R^* a' e^{-j\frac{2\pi x_0}{\lambda b}x}$$

וגל המשחזר פילוגו הוא

$$U_P = B\,e^{-j\frac{\pi}{\lambda(a+b)}\left[(x+c)^2+y^2\right]} = B'\,e^{-j\frac{2\pi\, c}{\lambda(a+b)}x} \cdot Q\left[\frac{-1}{a+b}\right]$$

כאשר מחשבים את המכפלה $U_P(x,y) I_H(x,y)$ האיברים השלישי והרביעי מקבלים שתי נקודות דמות ממשיות ימינה להולוגרמה במרחק $(a+b)$, כאשר נקודה אחת מעל או מתחת לציר האופטי בגובה

$$(a+b)\left(\frac{-c}{a+b}+\frac{x_0}{b}\right) = -c + x_0 + \frac{x_0 a}{b}$$

והנקודה השנייה מתחת לציר האופטי בגובה

$$-c - x_0 - \frac{x_0 a}{b}$$

הדמות גדולה יחסית לאובייקט בשעור

$$M = \frac{z_i}{z_0} = \frac{a+b}{b}$$

ב. נרשום את פילוג העוצמות של ההולוגרמה המונחים של אורך גל המשחזר החדש $\lambda_2 = 1.5\lambda$:

$$I_H = |R|^2 + |a'|^2 + R a'^* e^{j\frac{3\pi x_0}{\lambda_2 b}x} + R^* a' e^{-j\frac{3\pi x_0}{\lambda_2 b}x}$$

וגל המשחזר יהיה הפעם

$$U_P = B'\,e^{-j\frac{2\pi c}{\lambda_2(a+b)}x}\,Q\left[\frac{-1}{a+b}\right]$$

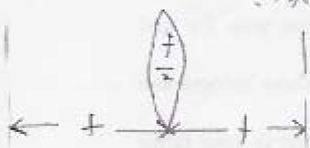
לכן מרכז של דמות וירטואלית אחת יהיה $(a+b)$ ימינה להולוגרמה בגובה: $(a+b)\left[\frac{-c}{a+b} - \frac{3}{2}\frac{x_0}{b}\right] = -c - \frac{3}{2}x_0 - \frac{3a}{2b}x_0$. הדמות הוירטואלית השנייה גם היא במרחק $(a+b)$ ימינה להולוגרמה בגובה:

$$-c + \frac{3}{2}x_0 + \frac{3a}{2b}x_0$$

יחס ההגדלה כעת:

$$M = \frac{3}{2}\frac{(a+b)x_0}{b\,x_0} = \frac{3}{2}\frac{a+b}{b} = \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0}$$

2. א. כדי לקבל דימות בהגדלה $M=1$, יש לשרשר שתי מערכות דימות בהגדלה $M=-1$. מערכת דימות עם $M=-1$ הכי פשוטה היא המערכת הבאה:



לפיכך על ה-SLM נשים את המסכה $e^{-j\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}}$ בעלת פילוג עדשה

את מישור המוצא נקבע במרחק L מתחת למפצל האלומה ונקבל 2 מערכות עוקבות של דימות, כ"א בעלת $M=-1$, ולכן הדימות הוא בהגדלה $M=1$ כנדרש. אין צורך במסנן במקרה זה.

ב. הפעם יש לקבל דימות בהגדלה $M=-1$. מערכת 4f נותנת הגדלה של $M=-1$. לכן כדי לממש מערכת 4f במערכת הנתונה יש להציג על ה-SLM את פ' הפילוג

$$e^{-j\frac{\pi(x^2+y^2)}{2\lambda L}}$$

מישור המוצא כמו בסעיף א' וגם כאן אין צורך במסנן.

ג. כעת הדרישה היא לשכפל את פ' הכניסה, כאשר כל שכפול מצוי בהגדלה של $M=-1$ ומוזז משכפול אחר במרחק d. כדי לשכפל במוצא יש לדגום במישור פורייה לאורך הציר האופקי כאשר המרחק בין הדגימות הוא $2\lambda L/d$. לכן המסנן הדרוש הוא $H(u,v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(u-\frac{2\lambda L}{d}n)$. מיקומו הוא במישור פורייה של מערכת 4f כלומר במישור המראה. מישור המוצא בסעיף זה זהה למיקום בשני הסעיפים הקודמים ופילוג המסכה ע"פ המצב זהה לזה שחושב בסעיף ב'!

פילוג עוצמה מבוקש	מיקום מישור המוצא	פילוג המסנן הדרוש	מיקום המסנן במערכת	פונקצית המסכה על ה-SLM
$\lvert f(x,y)\rvert^2$	מרחק L מתחת למפצל האלומה	$H(u,v)\equiv 1$	בכל מקום	$\exp\left[-j\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}\right]$
$\lvert f(-x,-y)\rvert^2$	מרחק L מתחת למפצל האלומה	$H(u,v)\equiv 1$	בכל מקום	$\exp\left[-j\frac{\pi(x^2+y^2)}{2\lambda L}\right]$
$\left\lvert\sum_n f(-x+nd,-y)\right\rvert^2$	מרחק L מתחת למפצל האלומה	$H(u,v)\equiv\sum_n\delta\left(u-\frac{2\lambda L}{d}n\right)$	במישור המראה	$\exp\left[-j\frac{\pi(x^2+y^2)}{2\lambda L}\right]$

3. א. הקיטוב של שלושת הצבעים לפני הכניסה ללוח
היה שהוא קיטוב אופקי והוא לכיוון המקטב P1.
ביציאה מהמערכת הצבעים אדום וכחול יוצאים
ללא הפסדים והירוק לא יוצא כלל. לכן המסקנה היא
שלוח ההשהיה סובב את קיטוב הכחול והאדום ב-90°
כך שיעברו באופן מלא את P2 ואילו את הירוק לוח ההשהיה
סובב את קיטובו ב-180°, כלומר השאיר אותו בקיטוב אופקי, אנכית
לכיוון של P2 כך שהוא "יבלע" לחלוטין. מאחר וצירי לוח ההשהיה
בזווית 45° לצירי המקטבים נובע שהוא פועל כלוח $\lambda/2$ עבור
האדום והכחול וכלוח λ עבור הירוק. לכן השהיות הפאזה
בין צירי הלוח מקיימות את המשוואות הבאות

(1) $$\frac{2\pi}{\lambda_R}(n_e-n_o)\Delta=(2m_R+1)\pi$$

(2) $$\frac{2\pi}{\lambda_B}(n_e-n_o)\Delta=(2m_B+1)\pi$$

(3) $$\frac{2\pi}{\lambda_G}(n_e-n_o)\Delta=2m_G\pi$$

כאשר Δ הוא עובי לוח ההשהיה ו- $m_R, m_B, m_G = 0,1,2\ldots$

כאשר מחלקים את מש' (1) ב-(2) מקבלים

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_R}=\frac{0.470}{0.630}=\frac{2m_R+1}{2m_B+1}$$

המספרים השלמים m_R ו-m_B הקטנים ביותר שמקיימים משוואה זו
הם $m_R=23$ ו- $m_B=31$. מספרים שלמים גדולים יותר שמקיימים
את המשוואה מניבים עובי שגדול מ-5 mm בניגוד לנתון בשאלה.
לכן העובי של הלוח

$$\Delta=\frac{\lambda_R}{(n_e-n_o)}\frac{(2m_R+1)}{2}=\frac{0.63\cdot10^{-3}}{0.005}\frac{47}{2}=2.961\,mm$$

ב. סיבוב לוח ההשהיה סביב צירו מקטין את זווית סיבוב הקיטוב של האדום והכחול
ולא משנה כלל את קיטוב הירוק. לפיכך האדום והכחול בלבד יוצאים מהמערכת
בעוצמה מחזורית. כל סיבוב של 45° העוצמה יורדת לאפס.
ג. סיבוב של P2 יבטל את בליעת הירוק ויקטין את בליעת האדום והכחול, עד שסיבוב ב-90°
רק הירוק יעבור.